b) Kako $g-f \in L^1(\mu)$, sledi $g=(g-f)+f \in L^1(\mu)$. Na osnovu prethodnog tvrđenja sledi

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu.$$

■

Teorema 5.4.

(a) Neka je $f : X \to [0,\infty]$ merljiva, $E \in \mathcal{M}$ i $\int_E f d\mu = 0$. Tada je $f = 0$ s.s. na E.

(b) Neka $f = u + iv \in L^1(\mu)$, merljiva funkcija i $\int_E f d\mu = 0$ za svako $E \in \mathcal{M}$. Tada je $f = 0$ s.s. na X.

Dokaz:

(a) Neka je $A_n = \{x \in E; f(x) > \frac{1}{n}\}, n \in \mathbf{N}$. Na osnovu Teoreme 4.1 b) sledi

$$\frac{1}{n}\mu(A_n) \leq \int_{A_n} f d\mu \leq \int_E f d\mu = 0.$$

Dakle, $\mu(A_n) = 0$, pa kako je $\{x \in E; f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, sledi da je taj skup mere 0.

Kako je $E = \{x \in E; f(x) > 0\} \bigcup \{x \in E; f(x) = 0\}$ sledi da je $f = 0$ s.s. na E.

(b) Neka je $f = u + iv$ i neka je $E = \{x \in X; u(x) \geq 0\}$. Kako je $u_-(x) = 0, x \in E$, i

$$0 = \int_E f d\mu = \int_E u_+ d\mu + i(\int_E v_+ d\mu - \int_E v_- d\mu)$$

sledi

$$\int_E u_+ d\mu = 0, \text{ pa iz (a) sledi } u_+ = 0 \text{ s.s. na } E.$$

Neka je $F = \{x \in X; u(x) < 0\}$; tada je $u_+(x) = 0$, $x \in F$. Iz

$$0 = \int_F f d\mu = -\int_F u_- d\mu + i(\int_F v_+ d\mu - \int_F v_- d\mu)$$

sledi $\int_F u_- d\mu = 0$, pa je na osnovu (a) $u_- = 0$ s.s. na F; dakle i $u = 0$ s.s. na F. Kako je $X = E \cup F$, sledi da je $u = 0$, s.s. na X.

Na sličan način se dokazuje $v = 0$ s.s. na X.

■